ÇALIŞMA SORULARI-1

1. Verilen her bir fonksiyonun verilen diferensiyel denklemin bir çözümü olduğunu yerine koyarak gerçekleyiniz.

a. $y'' - 9y = 0;\ \ y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-3x}$

b. $y'' - 2y' + 2y = 0;\ \ y_1 = e^{x}\cos x, y_2 = e^{-x}\sin x$

c. $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0;\ \ y_1 = \dfrac{1}{x^2}, y_2 = \dfrac{\ln x}{x^2}$

d. $y' + 2xy^2 = 0;\ \ y = \dfrac{1}{1+x^2}$

e. $x^2 y'' + xy' - y = \ln x;\ \ y_1 = x - \ln x, y_2 = \dfrac{1}{x} - \ln x$

2. Verilen diferensiyel denklemi ve verilen başlangıç koşulunu sağlayan bir $y = f(x)$ fonksiyonu bulunuz.

a. $\dfrac{dy}{dx} = (x-2)^2;\ y(2) = 1$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}};\ y(2) = -1$

c. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2+9};\ y(-4) = 0$

d. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x^2+1};\ y(0) = 0$

e. $\dfrac{dy}{dx} = \cos 2x;\ y(0) = 1$

3. Başlangıç değer problemlerinin açık çözümlerini bulunuz. (İpucu: Değişkenlerine ayrılabilir)

a. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2(y^2+1);\ y(0) = 1$

b. $(\tan x)\dfrac{dy}{dx} = y;\ y(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi$

c. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2 y;\ y(1) = 1$

d. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2;\ y(1) = -1$

4. Diferensiyel denklemlerin (Değişkenlerine ayrılabilir) genel çözümlerini (gerekliyse kapalı, uygunsa açık) bulunuz.

a. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sec y$

b. $y^3\dfrac{dy}{dx} = \left(y^4+1\right)\cos x$

c. $x^2\dfrac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

d. $x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1-4v^2}{3v}$

e. $y^{-1}dy + ye^{\cos x}\sin x\,dx = 0$

f. $\left(x + xy^2\right)dx + e^{x^2}y\,dy = 0$

g. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{xe^{t+2x}}$

5. Verilen birinci mertebe lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz. Eğer bir başlangıç koşulu verilmişse, bir özel çözümünü bulunuz.

a. $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x^2} = x\cos x,\ x > 0$ (C: $y = x^2 \sin x + Cx^2$)

b. $t^2 \dfrac{dx}{dt} + 3tx = t^4 \ln t + 1\ ;\ x(1) = 0$ (C: $x = \dfrac{t^3}{6}\ln t - \dfrac{t^3}{36} + \dfrac{1}{2t} - \dfrac{17}{36t^3}$)

c. $\sin x \dfrac{dy}{dx} + y\cos x = x\sin x;\ y(\dfrac{\pi}{2}) = 2$

d. $x\dfrac{dv}{dx} + 3v + 2x = 3x^2;\ v(1) = 1$

e. $x\dfrac{dy}{dx} + 3(y + x^2) = \dfrac{\sin x}{x}$

f. $\left(1 - x^2\right)\dfrac{dy}{dx} - x^2 y = \left(1 + x\right)\sqrt{1 - x^2}$

g. $\left(x^2 + 1\right)\dfrac{dy}{dx} + xy - x = 0,$ (C: $y = 1 + C\left(x^2 + 1\right)^{-1/2}$)

6. Verilen diferensiyel denklemlerin tam olduğunu gerçekleyiniz ve sonra çözünüz.

a. $\left(1 + e^x y + xe^x y\right)dx + \left(xe^x + 2\right)dy = 0$ (C: $F(x, y) = xe^x y + 2y + x = C$)

b. $\left(2xy - \sec^2 x\right)dx + \left(x^2 + 2y\right)dy = 0$ (C: $F(x, y) = x^2 y - \tan x + y^2 = C$)

c. $\left(\dfrac{1}{x} + 2y^2 x\right)dx + \left(2yx^2 - \cos y\right)dy = 0;\ y(1) = \pi,\ x > 0$ (C: $\ln x + x^2 y^2 - \sin y = \pi^2$)

d. $\left(e^t y + te^t y\right)dt + \left(te^t + 2\right)dy = 0;\ y(0) = -1$ (C: $y = -2/\left(te^t + 2\right)$)

e. $\left(\cos x\cos y + 2x\right)dx - \left(\sin x\sin y + 2y\right)dy = 0$ (C: $F(x, y) = \sin x\cos y + x^2 - y^2 = C$)

f. $\left(2xy + 3\right)dx + \left(x^2 - 1\right)dy = 0$

g. $\left(\dfrac{2x^{5/2} - 3y^{5/3}}{2x^{5/2}y^{2/3}}\right)dx + \left(\dfrac{3y^{5/3} - 2x^{5/2}}{3x^{3/2}y^{5/3}}\right)dy = 0$

7. $\left(y^2 + 2xy\right)dx - x^2 dy = 0$ denkleminin

a) tam diferensiyel denklem olmadığını gösteriniz.

b) her iki tarafı y^{-2} ile çarparak elde edilecek olan yeni denklemin tam diferensiyel denklem olduğunu gösteriniz.

c) Son olarak elde edilen tam diferensiyel denklemin çözümünden faydalanarak, orijinal denklemi çözünüz.

8. $M(x, y)dx + \left(\sec^2 y - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$ denklemini tam diferansiyel denklem yapacak olan bir $M(x, y)$ fonksiyonunu bulunuz.

9. $\left(ye^{xy}-4x^3y+2\right)dx+N(x,y)dy=0$ denklemini tam diferansiyel denklem yapacak olan $N(x,y)$ fonksiyonunu bulunuz.

10. Verilen Bernoulli diferensiyel denklemlerini çözünüz.

a. $\dfrac{dy}{dx}-5y=-\dfrac{5}{2}xy^3;$ (C: $y^{-2}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{20}+Ce^{-10x}$)

b. $\dfrac{dx}{dt}+tx^3+\dfrac{x}{t}=0;$ (C: $x^{-2}=2t^2\ln|t|+Ct^2$)

c. $\dfrac{dy}{dx}+y^3x+y=0$

d. $2xy'+y^3e^{-2x}=2xy$

e. $3xy^2y'=3x^4+y^3$ (C: $y(x)=\left(x^4+Cx\right)^{1/3}$)

f. $y'=y+y^3$

g. $y^2(xy'+y)(1+x^4)^{1/2}=x$

11. Verilen diferensiyel denklemlerini uygun değişken değiştirme yöntemi ile çözünüz.

a. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2+x^2}{x^2};$ C: $y=x\tan(\ln|x|+C)$

b. $\dfrac{dy}{dx}=y-x-1+(x-y+2)^{-1};$ C: $(x-y+2)^2=Ce^{2x}+1$ $(ipucu:\ u=x-y)$

c. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y^2}{3xy}$

d. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(\ln y-\ln x+1)}{x}$ $(ipucu:\ \ln y-\ln x=\ln\dfrac{y}{x})$

e. $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x-y)$

f. $\dfrac{dy}{dx}=(x-y+5)^2$

g. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x+y}-1$ C: $y=\left(x+C\right)^2/4-x$

h. $\dfrac{dy}{dx}=2-\sqrt{2x-y+3}$ C: $y=2x+3-(x+C)^2/4$

12. İndirgenebilir ikinci mertebe diferansiyel denklemleri çözünüz.

a. $y^3y''=1$

b. $y''=4yy'$

c. $yy''=2(y')^2$

d. $xy''+y'=4x$

e. $y''+9y=0$

13. Aşağıdaki denklemler için bir integral çarpanı bulunuz ve sonra denklemi çözünüz.

a. $\left(2x + yx^{-1}\right)dx + \left(xy - 1\right)dy = 0$

b. $\left(x^2 \sin x + 4y\right)dx + xdy = 0$

c. $2xydx + \left(y^2 - 3x^2\right)dy = 0$

d. $\left(x^4 - x + y\right)dx - xdy = 0$

e. $\left(y^2 + 2xy\right)dx - x^2 dy = 0$

14. $\left[P(x)y - Q(x)\right]dx + dy = 0$ lineer diferansiyel denklemin $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ ile çarpıldığında tam diferansiyel olduğunu gösteriniz.